ФИЗИКА

УДК 530.12:531.51; 524.834

В. К. Щиголев

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ДРОБНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Аннотация. Рассмотрено получение и исследование динамических уравнений для космологических моделей, основанных на эффективных действиях дробного порядка. Для вывода модифицированных уравнений Фридмана однородных и изотропных космологических моделей из феноменологически построенного дробного действия применяются обобщения уравнений Эйлера-Пуассона, полученные ранее в теории дробного функционала. Для получения точных решений применяются математические анзацы и феноменологические законы эволюции космологического члена. Получены динамические уравнения и их точные решения в космологической теории дробного функционала действия. Рассмотрены космологические модели двух типов: модель дробного полного действия и модель дробного действия Эйнштейна – Гильберта. Исследованы случаи различных уравнений состояния вещества, заполняющего Вселенную. На основе предложенного анзаца для космологического члена получены точные решения уравнений динамики моделей. Приведены примеры законов эволюции космологического члена, широко обсуждаемых в литературе и имеющих наблюдательную основу. Установлена возможность ускоренного расширения Вселенной в наших моделях. Полученные результаты демонстрируют новые свойства космологических моделей, полученных из дробного действия, по сравнению со стандартными моделями, и открывают новые возможности в исследовании феномена Темной энергии. Предполагаемыми областями применения полученных результатов являются теоретическая космология и астрофизика.

Ключевые слова: космологические модели, дробный функционал действия, точные решения, ускоренное расширение.

V. K. Shchigolev

COSMOLOGICAL MODELS IN THE THEORY OF FRACTIONAL ACTION FUNCTIONAL

Abstract. The objective of the work is to obtain and study the dynamical equations for cosmological models based on the effective action of fractional order. In order to derive the modified Friedmann equations of the homogeneous and isotropic cosmological models phenomenologically constructed on the basis of fractional action, the author applies generalization of the Euler-Poisson equation obtained previously in the theory of fractional functional. To obtain exact solutions the researchers uses mathematical ansätzs and phenomenological laws of the cosmological term evolution. The dynamical equations and their exact solutions in the cosmological theory of the fractional action are obtained. The article considers two types of cosmological models: the model of fractional total action functional and the fractional model of the Einstein – Hilbert action. The study investigates the cases of various equations of state of the matter that fills the universe. On the basis of some ansatzs for the cosmological term proposed in this paper, exact solutions to the dynamical equations of the models are obtained. Some examples of the laws of evolution of the cosmological term, widely discussed in the literature, are provided. The author also establishes the possibility of accelerated expansion of the universe in his models. The results demonstrate the new features of cosmological models derived from the fractional action compared to the standard models and open up new possibilities in the study of the dark energy phenomenon. The expected fields of application of the obtained results are the theoretical cosmology and astrophysics.

Key words: cosmological models, fractional action functional, exact solutions, accelerated expansion.

Введение

В настоящей работе представлены результаты исследования космологических моделей, построенных автором из функционала действия дробной кратности [1, 2], и их модификаций на основе сформулированного в [3] дробного вариационного принципа для динамических полевых теорий вообще и в теории гравитации в частности. В этом подходе интеграл действия $S_L[q]$ для лагранжиана $L(\tau, q(\tau), \dot{q}(\tau))$ записывается как дробный интеграл [4]:

$$S_L[q_i] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} L(\tau, q_i(\tau), \dot{q}_i(\tau))(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \qquad (1)$$

по существу являющийся при фиксированном t интегралом Римана – Стилтьеса от L с интегрирующей функцией $g_t(\tau) = [t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}] / \Gamma(1+\alpha)$, обладающей следующим масштабным свойством: $g_{\mu t}(\mu\tau) = \mu^{\alpha} g_t(\tau)$, $\mu > 0$ (см. также [5, 6]).

Целью настоящей работы является построение моделей двух типов на основе дробного интеграла действия, записанного для всей системы или только для его гравитационной компоненты, и исследование их эволюционных уравнений. Решение модифицированных уравнений в моделях дробного действия представляется важным для анализа поведения моделей в аспекте исследования ускоренного космологического расширения. К сожалению, до сих пор известно малое число таких решений. Более того, эти решения находят исходя из заданных режимов эволюции масштабного фактора [7, 8], хотя логичнее исходить из некоторых физически или математически обоснованных предпосылок и уже после этого анализировать характер поведения масштабного фактора. В настоящей работе решения для космологических моделей дробного функционала действия получены как из предположения о вакуум-подобном состоянии материи, так и из определенной зависимости между космологическим членом и параметром Хаббла достаточно общего характера, частные случаи которой ранее использовались в литературе многими авторами. Также нами исследована возможность ускоренного расширения Вселенной в исследуемых моделях.

1. Уравнения модели дробного полного интеграла действия

Следуя определению (1), модифицированное действие в пространственно-плоской метрике Фридмана – Робертсона – Уокера,

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a^2(t)\delta_{ik} dx^i dx^k,$$

где N – функция шага, представляется в виде следующего дробного интеграла для гравитационного поля и материи, заполняющей Вселенную [1, 2]:

$$S_{eff}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t N \left[\frac{3}{8\pi G} \left(\frac{a^2 \ddot{a}}{N^2} + \frac{a\dot{a}^2}{N^2} - \frac{a^2 \dot{a} \dot{N}}{N^3} - \frac{\Lambda a^3}{3} \right) + a^3 L_m \right] (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (2)$$

где $\alpha \in (0,1)$, точка над функцией означает производную по времени t, а L_m – плотность лагранжиана для материи, характеризуемой плотностью энергии ρ и давлением p. Вариация действия (2) с последующим выбором калибровки $N = 1$ позволяет получить модифицированное уравнение неразрывности,

$$\dot{\rho} + 3\left(H + \frac{1-\alpha}{3t} \right)(\rho + p) = 0, \quad (3)$$

и систему уравнений Эйлера – Пуассона, которой можно придать следующий вид модифицированных уравнений Фридмана [2]:

$$\rho = 3H^2 + 3\frac{(1-\alpha)}{t} H - \Lambda, \quad (4)$$

$$p = -2\dot{H} - 3H^2 - 2\frac{(1-\alpha)}{t} H - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{t^2} + \Lambda, \quad (5)$$

где гравитационная постоянная $8\pi G = 1$, а $H(t) = \dot{a}/a$ суть параметр Хаббла.

Известно, что в стандартной космологии уравнение неразрывности для идеальной жидкости, т.е. закон сохранения энергии материи как источника гравитации, следует из тождества Бианки для тензора кривизны Римана. Иначе говоря, в стандартной космологии, когда $\alpha = 1$, уравнение неразрывности (3) является дифференциальным следствием уравнений (4), (5). Легко убедиться, что из этих уравнений в случае $\alpha \neq 1$ также следует модифицированное уравнение неразрывности (3), но только если выполняется равенство [1, 2]:

$$\dot{H} + 3H^2 - \frac{2(4-\alpha)}{t} H - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{t^2} = \frac{t\dot{\Lambda}}{1-\alpha}. \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (6) записано после деления на ненулевой множитель $(1-\alpha)$, первоначально возникающий в левой части этого уравнения. Поэтому при переходе к стандартной космологии ОТО, т.е. для $\alpha = 1$, исходное уравнение (6) однозначно приводит к постоянному космологическому члену Λ, а уравнения (4), (5) приобретают свою обычную форму уравнений Фридмана.

Уравнение неразрывности (6) точно интегрируется для идеальной жидкости с уравнением состояния $p = w\rho$, что дает

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)} t^{(1+w)(1-\alpha)}}. \quad (7)$$

Если требование постоянства баротропного индекса w в уравнении состояния отсутствует, к чему все более вынуждают современные наблюдательные данные и исследования в области теоретической космологии, то в качестве определяющей системы динамических уравнений модели удобнее взять систему (4)–(6). При этом эффективное уравнение состояния $w_{eff} = p_{eff} / \rho_{eff}$, где $p_{eff} = p - \Lambda$ и $\rho_{eff} = \rho + \Lambda$, согласно выражениям (4) и (5) может быть приведено к виду

$$w_{eff} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dfrac{\dot{H}}{H^2} - \dfrac{1-\alpha}{2(tH)} + \dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2(tH)^2}}{1 + \dfrac{1-\alpha}{(tH)}}. \qquad (8)$$

Отметим, что w_{eff} совпадает с известным стандартным выражением $w_{eff} = -1 - \frac{2}{3}(\dot{H} / H^2)$ в предельном переходе $\alpha \to 1$, но может существенно отличаться от него в случае дробной кратности эффективного функционала действия (2). Более того, из возможности равенства нулю числителя дроби в выражении (8) в некоторый момент времени следует, что модель допускает пересечение так называемой фантомной границы $w_{eff} = -1$. Разумеется, последнее не означает, что в момент пересечения фантомной границы уравнение состояния материи также $w = -1$. Следует заметить, что эффективное уравнение состояния является динамической характеристикой модели и получило новое определение в виде формулы (8), а параметр замедления

$$q = -\frac{a^2\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} \qquad (9)$$

определяется так же, как и в стандартной космологии, являясь кинематической характеристикой модели [9].

2. Модель с квази-вакуумным состоянием материи: $w = -1$

Приведем пример точного решения для модели в этом случае. Из соотношения (7) следует, что $\rho(t) = \rho_0 = \mathrm{const}$ и $p = -\rho = -\rho_0$, как и в стандартной космологии. Тогда оставшиеся независимыми уравнения из системы (4)–(6) для параметра Хаббла $H(t)$ и космологического члена $\Lambda(t)$ можно переписать в следующем виде:

$$\dot{H} - \frac{1-\alpha}{2t}H + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2t^2} = 0, \qquad (10)$$

$$H^2 + \frac{1-\alpha}{t}H = \frac{1}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3}. \qquad (11)$$

Из уравнения (10) легко найти, что параметр Хаббла меняется со временем по закону

$$H = \frac{C_\alpha}{t} + H_0 t^{\frac{1-\alpha}{2}}, \qquad (12)$$

где $C_\alpha = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(3-\alpha)}$; H_0 – положительная константа интегрирования, из которого следует следующая зависимость масштабного фактора от времени t:

$$a = a_0 t^{C_\alpha} \exp\left(\frac{3-\alpha}{2} H_0 t^{\frac{3-\alpha}{2}} \right). \quad (13)$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведены графики функций $H(t)$ и $a(t)$ для $\alpha = 0{,}8$. Эффективный космологический член $\Lambda_{eff} = \Lambda + \rho_0$ как функцию времени можно найти из уравнения (11) в виде

$$\Lambda_{eff} = 3H_0^2 t^{1-\alpha} + 3H_0 \frac{(1-\alpha)(7-3\alpha)}{(3-\alpha)} t^{-\frac{1+\alpha}{2}} + \frac{3(1-\alpha)^2(2-\alpha)(5-2\alpha)}{(3-\alpha)} \cdot \frac{1}{t^2}. \quad (14)$$

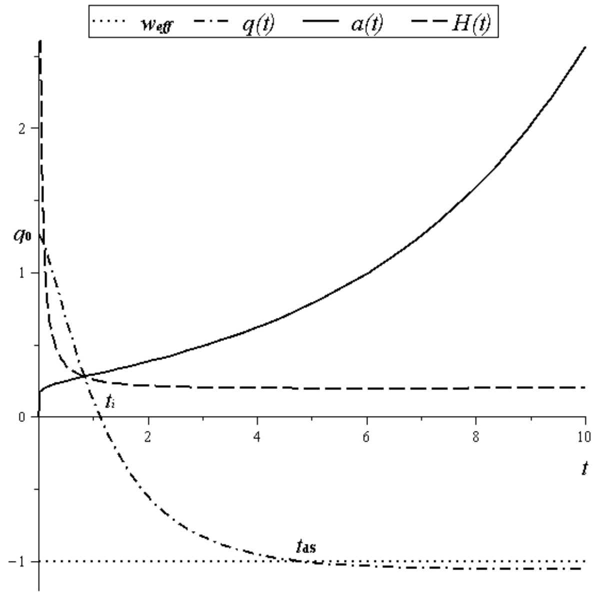

Рис. 1. Эволюция уравнения состояния w_{eff}, параметра замедления q, масштабного фактора a и параметра Хаббла H в модели $w=-1$. Здесь $\alpha = 0{,}8$, $t_0 = 0{,}25$ и $H_0 = 0{,}15$

Видно, что при переходе к стандартной модели в пределе $\alpha \to 1$ полученное решение (12)–(14) приводит к известному экспоненциальному закону расширения Вселенной: $a = a_0 e^{H_0 t}$, $H = H_0$, $\Lambda_{eff} = 3H_0^2$.

Интересной особенностью полученного решения является то, что согласно формуле (8) и уравнению (10) эффективное уравнение состояния совпадает с уравнением состояния материи, т.е. равно $w_{eff} = -1$, но космологический член эволюционирует согласно формуле (14). Еще более значительное отличие исследуемой модели от стандартной ΛCDM-модели заключается в поведении параметра замедления. Из уравнений (9) и (10) следует, что

$$q(t) = -1 - \frac{1-\alpha}{2(tH)} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2(tH)^2}.$$

Воспользовавшись явным видом выражения $tH = C_\alpha + H_0 t^{(3-\alpha)/2}$ из решения (12), легко показать, что параметр замедления начинает уменьшаться от значения $q_0 = q(t=0) = -1 + C_\alpha^{-1} > 0$ до нуля в некоторый момент t_i, который просто найти из равенства $q(t_i) = 0$ как

$$t_i = (4H_0)^{-\frac{2}{3-\alpha}} \left[\sqrt{(1-\alpha)(17-9\alpha)} - \frac{(1-\alpha)(11-5\alpha)}{3-\alpha} \right]^{\frac{2}{3-\alpha}}.$$

После этого первоначально замедленное расширение сменяется ускоренным для всех $t > t_i$. В момент времени $t_{dS} = \left[2(2-\alpha)/H_0(3-\alpha)\right]^{2/(3-\alpha)}$ параметр замедления пересекает де Ситтеровский режим $q = -1$ и далее достигает своего минимума $q_{\min} = -1 - [(1-\alpha)/8(2-\alpha)]$ в момент времени больший t_{dS}, а именно $t_{\min} = [(2-\alpha)(5-\alpha)/H_0(3-\alpha)]^{2/(3-\alpha)}$. Начиная с этого момента параметр замедления асимптотически стремится к $q_\infty = -1$ из области $q < -1$. На рис. 1 представлены зависимости q и w_{eff} от времени. Для стандартной Λ CDM-модели, т.е. при $\alpha = 1$, находим $t_i = 0$, что соответствует ускоренному расширению для всех моментов времени $t \geq 0$ с параметром замедления $q = -1$.

3. Модель с уравнением состоянием материи $w \neq -1$

Получим класс точных решений уравнения (3), предполагая известным закон эволюции космологического члена $\Lambda(t)$. Для этой цели выполним следующие подстановки в уравнение (3):

$$x = \ln(t/t_0) \Leftrightarrow t = t_0 \exp(x);$$

$$Y(t) = t\,H(t), \tag{15}$$

где $t_0 > 0$ - некоторая константа, в результате чего оно перепишется в виде

$$Y'(x) - (9-2\alpha)Y(x) + 3Y^2(x) - (1-\alpha)(2-\alpha) = \frac{t_0^2}{1-\alpha} e^{2x} \Lambda'(x), \tag{16}$$

где штрих означает производную по переменной x. Из вида этого уравнения можно предположить, что существует класс решений исследуемой модели, для которого космологический член удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Lambda'(x) = \frac{1-\alpha}{t_0^2} e^{-2x} \left[k_1 Y'(x) + k_2 Y(x) + k_3 Y^2(x) + k_4 \right], \tag{17}$$

где k_i – произвольные константы.

Действительно, подстановка (17) в уравнение (16) приводит его к виду

$$AY'(x) - BY(x) + CY^2(x) = D, \tag{18}$$

где коэффициенты равны:

$$A = 1 - k_1,\ B = 9 - 2\alpha + k_2,\ C = 3 - k_3,\ D = (1-\alpha)(2-\alpha) + k_4. \tag{19}$$

Поэтому все модели, в которых космологический член представляется через *анзац* (17), имеют однотипные решения и эволюционируют подобным образом. Общее решение уравнения (18) можно записать как

$$Y(x) = \frac{1}{2C}\left[B + \sqrt{B^2 + 4CD}\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2+4CD}}{2A}x\right)\right], \tag{20}$$

где $B^2 + 4CD > 0$ и $C \neq 0$, а постоянная интегрирования включена в произвольную константу t_0, что всегда можно сделать в силу определения (15).

Отметим еще одну особенность рассматриваемой модели, связанную с особым типом симметрии уравнения (18). Легко убедиться, что функция $X(x) = 1/Y(x)$ удовлетворяет уравнению того же типа, что и уравнение (18) с заменой в нем коэффициентов (19) согласно $A \to A$, $B \to -B$, $C \leftrightarrow D$ при условии $C, D \neq 0$, т.е. уравнению вида $AX'(x) + BX(x) + DX^2(x) = C$. Поэтому решение для $X(x) = Y^{-1}(x)$ можно представить в следующем виде:

$$X(x) = \frac{1}{2D}\left[-B + \sqrt{B^2 + 4CD}\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2+4CD}}{2A}(x + x_0)\right)\right], \tag{21}$$

где константа x_0 определяется из соотношения

$$\tanh\frac{\sqrt{B^2+4CD}}{2A}x_0 = \frac{\sqrt{B^2+4CD}}{B}.$$

После этого можно убедиться, что эффективное уравнение состояния (8) может быть просто выражено через найденную функцию $X(x)$ из (21) в следующем виде:

$$w_{eff}(x) = -1 + \frac{1}{3}\,\frac{2X' + (3-\alpha)X - (1-\alpha)(2-\alpha)X^2}{1 + (1-\alpha)X}. \tag{22}$$

Возвращаясь к исходным переменным согласно (15), решение (20) для параметра Хаббла может быть представлено как

$$H(t) = \frac{1}{2Ct}\left(B + 2nA\tanh[n\ln(t/t_0)]\right),\quad n = \frac{\sqrt{B^2+4CD}}{2A}, \tag{23}$$

откуда следует выражение для масштабного фактора вида

$$a(t) = a_0\, t^{B/2C}\left(\cosh\left[n\ln(t/t_0)\right]\right)^{A/C}, \tag{24}$$

где a_0 – постоянная интегрирования, $n \in \mathbf{R}$. На рис. 2 графически проиллюстрированы зависимости $H(t)$ и $a(t)$, представленные соответственно формулами (23) и (24). Графики эволюции эффективного уравнения состояния $w_{eff}(t)$ для полученного решения приведены на рис. 3. Можно отметить, что при определенных значениях коэффициентов уравнения (18), т.е. констант α и k_i в формулах (19), возможно позднее ускоренное космологическое расширение и неоднократное пересечение фантомной границы $w_{eff} = -1$. Именно такое поведение Вселенной предполагается по современным астрофизическим наблюдениям [10, 11].

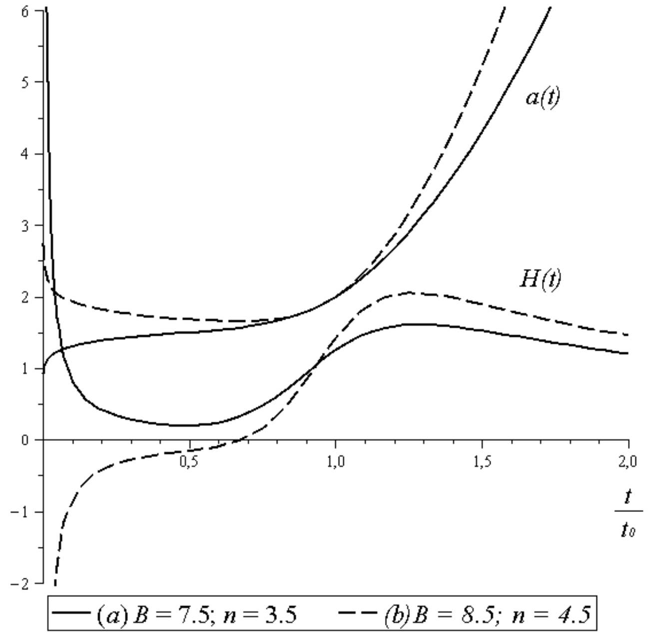

Рис. 2. Эволюция параметра Хаббла (23) и масштабного фактора (24) при различных значениях B и n (здесь $A = 1$, $C = 3$ и $a_0 = 2$)

Эволюция модели качественно меняется при $B^2 + 4CD < 0$, что допустимо в силу произвольности констант k_i в определениях (19). Обозначая в этом случае чисто мнимый коэффициент $n = in_0$, где $n_0 = \sqrt{|4CD + B^2|} \in \mathbf{R}$, мы можем записать для масштабного фактора выражение, аналогичное (24), но с заменой $\cosh[n \ln(t/t_0)] \to |\cos[n \ln(t/t_0)]|$. Последнее означает, что эволюция масштабного фактора приобретает свойство цикличности по логарифмической временной переменной $x = \ln(t/t_0)$. Отметим, что эволюция масштабного фактора циклического характера обсуждалась в литературе ранее в различных контекстах.

Наконец, приведем примеры реализации полученных решений с некоторыми феноменологическими зависимостями $\Lambda(t)$, имеющими наблюдательное обоснование и широко обсуждаемыми в литературе (см., например, [12, 13]). Для этого перепишем *анзац* (17) с помощью определений (15) через исходные переменные в виде

$$\dot{\Lambda} = (1-\alpha)\left[k_1 \frac{\dot{H}}{t} + (k_1 + k_2)\frac{H}{t^2} + k_3 \frac{H^2}{t} + \frac{k_4}{t^3}\right]. \tag{25}$$

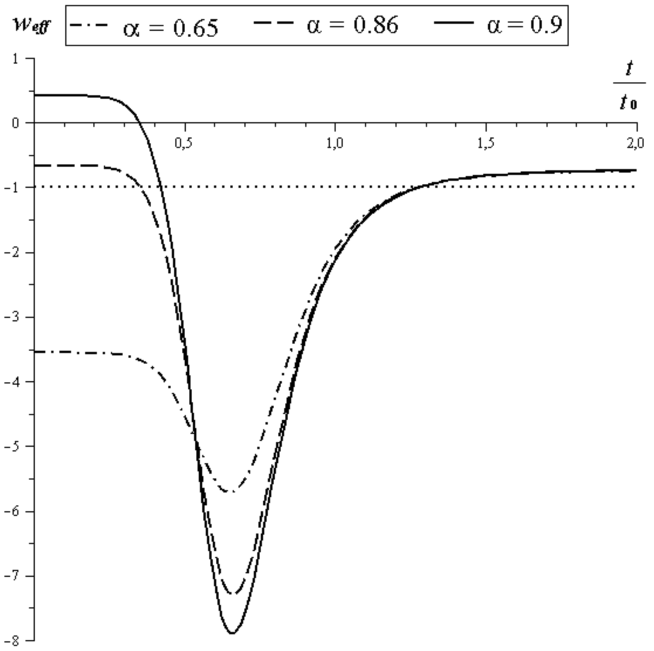

Рис. 3. Эффективное уравнение состояния w_{eff} для случая (*a*) на рис. 2 как функция времени при различных значениях α

Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть $k_i = 0$, где $i = 1, ..., 4$. Тогда из (25) следует, что $\Lambda = \text{const}$. В соответствии с определениями (19) и (23) находим

$$A_1 = 1,\ B_1 = 9 - 2\alpha,\ C_1 = 3,\ n_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(9-4\alpha)^2 + 24}.$$

2. Пусть теперь $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ и $k_4 = -2\beta/(1-\alpha)$, где β – произвольная положительная константа. Интегрируя (25), получаем $\Lambda(t) = \beta / t^2$, где постоянная интегрирования положена равной нулю, а из (19) и (23) находим следующие значения коэффициентов:

$$A_2 = 1,\ B_2 = 9 - 2\alpha,\ C_2 = 3,\ n_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(9-4\alpha)^2 + 24\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}}.$$

3. Наконец, пусть $k_1 = \beta/(1-\beta), k_2 = -2k_1, k_3 = k_4 = 0$. Из уравнения (25) находим, что $\Lambda(t) = (\beta/t)H(t)$, а значения постоянных коэффициентов из (19) и (23) даются следующими выражениями:

$$A_3 = \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}, \ B_3 = 9 - 2\alpha - \frac{2\beta}{1-\alpha}, \ C_3 = 3,$$

$$n_3 = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}\sqrt{\left[(1-\alpha)(9-4\alpha)-2\beta\right]^2 + 8(1-\alpha)\left[3(1-\alpha)-\alpha\beta\right]}.$$

Интересно отметить, что параметр n_2 может принимать мнимые значения при значениях константы связи $\beta > (1-\alpha)[(9-4\alpha)^2 + 24]/24$, что соответствует случаю циклической эволюции модели, упомянутой выше.

4. Модель дробного интеграла действия Эйнштейна – Гильберта

В этом разделе мы представим второй тип космологических моделей, получаемых из вариационного принципа для дробного интеграла действия. Эти модели основаны на различии в весовых функциях для интегралов действия гравитации и материи. Пусть полное действие системы имеет вид $S_{tot}^{\alpha} = S_{EH}^{\alpha} + S_m$, где эффективное действие для материи записывается в обычном виде: $S_m = \int L_m N a^3 dt$, а интеграл действия Эйнштейна – Гильберта имеет то же дробное выражение, что и гравитационная часть интеграла (2):

$$S_{EH}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{3}{8\pi G} N\left(\frac{a^2\ddot{a}}{N^2} + \frac{a\dot{a}^2}{N^2} - \frac{a^2\dot{a}\dot{N}}{N^3} - \frac{\Lambda a^3}{3}\right)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \quad (26)$$

Из вариационного принципа, примененного к S_{tot} с учетом (26), следуют следующие основные динамические уравнения:

$$t^{1-\alpha}\rho = 3H^2 + 3\frac{(1-\alpha)}{t}H - \Lambda; \quad (27)$$

$$t^{1-\alpha}p = -2\dot{H} - 3H^2 - 2\frac{(1-\alpha)}{t}H - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{t^2} + \Lambda, \quad (28)$$

где мы положили для простоты $8\pi G\Gamma(\alpha) = 1$.

Замечательной особенностью модели является то, что уравнение неразрывности записывается в обычном виде

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (29)$$

выражая собой стандартный закон сохранения энергии для идеальной жидкости такой же, как и в космологии общей теории относительности.

Можно показать, что из уравнений (27) и (28) в случае $\alpha \neq 1$ следует уравнение неразрывности (29), если только выполняется равенство

$$\dot{H} - 2\frac{(2-\alpha)}{t}H = \frac{t^{2-\alpha}}{3(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(t^{\alpha-1}\Lambda\right), \quad (30)$$

записанное после деления на ненулевой множитель $(1-\alpha)$.

Можно заметить, что в пределе $\alpha = 1$ из уравнения (30) вновь следует постоянство космологического члена: $\Lambda = \text{const}$. Используя уравнения (27) и (28), можно найти уравнение состояния материи в следующем виде:

$$w_m = \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dfrac{\dot{H}}{H^2} - \dfrac{1-\alpha}{2(tH)} + \dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2(tH)^2}}{1 + \dfrac{1-\alpha}{(tH)} - \dfrac{\Lambda}{3H^2}}. \tag{31}$$

Легко найти, что для квазивакуумного состояния материи при $w_m = -1$ из (31) следует уравнение, совпадающее с уравнением (10) в модели первого типа. Поэтому решения для $H(t)$ и $a(t)$ в этом случае совпадают с решениями (12), (13) для соответствующей модели первого типа. Отличие состоит только в том, что космологический член согласно (28) представляется правой частью уравнения (14) за вычетом слагаемого $t^{1-\alpha}\rho_0$, медленно возрастающего со временем при α, близких к 1. Интересно, что при условии $\rho_0 = 3H_0^2$ космологический член содержит только убывающие со временем члены, что согласуется с результатами наблюдений.

Рассмотрим далее случай $w_m \neq -1$. Воспользовавшись определениями (15), можно переписать уравнение (30) в виде

$$Y' - (5-2\alpha)Y = \frac{t_0^2}{3(1-\alpha)} e^{(3-\alpha)x}\left(e^{-(1-\alpha)x}\Lambda\right)', \tag{32}$$

где штрих означает производную по переменной x.

Очевидно, что существует класс решений исследуемой модели, для которого космологический член удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(e^{-(1-\alpha)x}\Lambda(x)\right)' = \frac{3(1-\alpha)}{t_0^2} e^{(\alpha-3)x}\left(c_1 Y'(x) + c_2 Y(x) + c_3\right), \tag{33}$$

где c_i – произвольные константы. Подстановка (33) в уравнение (32) приводит последнее к виду

$$KY'(x) - LY(x) = M, \tag{34}$$

где коэффициенты равны:

$$K = 1 - c_1,\ \ L = 5 - 2\alpha + c_2,\ \ M = c_3. \tag{35}$$

Не представляет труда найти общее решение уравнения (34): $Y(x) = -\dfrac{M}{L} + \text{const}\cdot\exp\left(\dfrac{L}{K}x\right)$, что позволяет записать для параметра Хаббла выражение

$$H(t) = \frac{1}{t}\cdot\left[\frac{H_0 L}{K}\cdot t^{L/K} - \frac{M}{L}\right], \tag{36}$$

где введена новая константа интегрирования H_0.

Отсюда следует закон эволюции масштабного фактора вида

$$a(t) = a_0 t^{-M/L} \exp\left\{ H_0 t^{L/K} \right\}. \tag{37}$$

В качестве примеров рассмотрим три случая значений констант c_i в формуле (33), предварительно записав ее в исходных переменных согласно (15):

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\alpha-1}\Lambda(t) \right) = 3(1-\alpha)t^{\alpha-4}\left[c_1 t^2 \dot{H}(t) + (c_1 + c_2)tH(t) + c_3 \right]. \tag{38}$$

1. Пусть все $c_i = 0$. Из уравнения (38) следует $\Lambda = \Lambda_0 t^{1-\alpha}$, где $\Lambda_0 > 0$ суть постоянная интегрирования. Согласно формулам (35) имеем для коэффициентов в решении (36) и (37): $K = 1,\ L = 5 - 2\alpha,\ M = 0$.

2. Пусть $c_1 = c_2 = 0$ и $c_3 = -\beta(3-\alpha)/3(1-\alpha) < 0$, где $\beta > 0$ суть постоянный параметр. Интегрируя уравнение (38) и полагая постоянную интегрирования равной нулю, имеем известное выражение для закона эволюции космологического члена: $\Lambda = \beta / t^2$.

3. Пусть $c_1 = \beta/3(1-\alpha),\ c_2 = -c_1(3-\alpha)$ и $c_3 = 0$, где $\beta > 0$ суть постоянный параметр. Интегрируя уравнение (38) и полагая постоянную интегрирования равной нулю, имеем другое известное выражение для закона эволюции космологического члена: $\Lambda = (\beta/t)H(t)$.

Можно убедиться, что во всех этих случаях уравнение состояния материи (31) зависит от времени. Для исследования поведения модели в случае фиксированного уравнения состояния $w_m = \text{const}$ удобно переписать уравнения (31) относительно параметра Хаббла в виде

$$2\dot{H} + 3(1+w_m)H^2 + (2+3w_m)\frac{(1-\alpha)}{t}H + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{t^2} = (1+w_m)\Lambda. \tag{39}$$

При этом решение уравнения (29) можно записать в стандартном виде $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w_m)}$, а уравнение (30) все еще имеет силу, обеспечивая вывод уравнения (29) из системы (27)–(28). Подстановка Λ из уравнения (39) в уравнение (30) приводит к следующему уравнению для параметра Хаббла:

$$2t\ddot{H} + 6(1+w_m)tH\dot{H} - 3(1-\alpha)\dot{H} - (1-\alpha)(2-\alpha)(1+2w_m)\frac{H}{t} -$$

$$-3(1+w_m)(1-\alpha)H^2 - (1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)\frac{1}{t^2} = 0. \tag{40}$$

Можно указать точные аналитические решения этого уравнения лишь для некоторых частных значений w_m и α или получить решения численными методами. Надо помнить при этом, что порядок уравнения был повышен при подстановке Λ из (39) в уравнение (30) и, следовательно, могли появляться решения, не удовлетворяющие исходные уравнения. Поэтому решения уравнения (40) должны быть подставлены одновременно с $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w_m)}$ в систему (27)–(28) для должного отбора констант интегрирования. Такая задача представляет определенный интерес и она будет рассмотрена в отдельной работе.

Заключение

Таким образом, в работе получен ряд точных решений для двух типов космологических моделей, построенных из вариационного принципа для дробного функционала действия в [1] в приложении либо к полной системе гравитационных и материальных полей, либо только к гравитации. Решение динамических уравнений моделей найдены из предположения о вакуум-подобном состоянии материи, заполняющей Вселенную, и исходя из достаточно общих предположений для эволюции космологического члена. В любом случае поведение моделей демонстрирует их значительное отличие от соответствующих стандартных моделей, что, очевидно, является следствием дробности функционалов действия и, возможно, фрактальной природы пространства-времени (см., например, [5, 6]).

Особенно привлекательной, на наш взгляд, является та особенность полученных решений, что эффективное уравнение состояния, определенное в работе формулами (8), способно пересекать фантомную границу, как то диктуется современными астрофизическими наблюдениями. Отметим, что в стандартной космологии с единственным источником такое пересечение невозможно (так называемая «No-Go»-теорема). Кроме того, при определенных условиях существуют модели, способные совершать циклическую эволюцию, также привлекающую внимание исследователей в последнее время.

Список литературы

1. **Shchigolev, V. K.** Cosmological Models with Fractional Derivatives and Fractional Action Functional / V. K. Shchigolev // Commun. Theor. Phys. – 2011. – Vol. 56. – P. 389–396.
2. Shchigolev, V. K. – URL: http://arxiv.org;article-id: arXiv:[gr-qc] 1208.3454.
3. **El-Nabulsi, A. R.** Cosmology with a Fractional Action Priciple / A. R. El-Nabulsi // Rom. Report in Phys. – 2007. – Vol. 59. – P. 763–771.
4. **Учайкин, В. В.** Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск : Артишок, 2008. – 512 с.
5. **Calcagni, G.** Quantum field theory, gravity and cosmology in a fractal universe / G. Calcagni // JHEP. – 2010. – Vol. 03. – P. 120.
6. **Calcagni, G.** Fractal universe and quantum gravity / G. Calcagni // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104. – P. 251301.
7. **Debnath, U.** Fractional Action Cosmology: Emergent, Logamediate, Intermediate, Power law Scenarios of the Universe and Generalized Second Law of Thermodynamics of dark energy / U. Debnath, M. Jamil, S. Chattopadhyay // Int. J. Theor. Phys. – 2010. – Vol. 51. – P. 812–837.
8. **Jamil, M.** Fractional Action Cosmology with Power Law Weight Function / M. Jamil, M. A. Rashid, D. Momeni, O. Razina, K. Esmakhanova // J. Phys.: Conf. Ser. – 2012. – Vol. 354. – P. 012008.
9. **Sahni, V.** Statefinder – a new geometrical diagnostic of dark energy / V. Sahni, T. D. Saini, A. Starobinsky, U. Alam // JETP Lett. – 2003. – Vol. 77. – P. 201.
10. **Riess, A. G.** Results from the High-z Supernova Search Team / A. G. Riess et al. // Astron. J. – 1998. – Vol. 116. – P. 1009.

11. **Perlmutter, S.** Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae / S. Perlmutter et al. // The Astrophysical Journal. – 1999. – Vol. 517, № 2.
12. **Overduin, J. M.** Evolution of the scale factor with a variable cosmological term / J. M. Overduin, F. I. Cooperstock // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58. – P. 043506.
13. **Sahni, V.** The Case for a Positive Cosmological Λ -Term / V. Sahni, A. Starobinsky // Int. J. Mod. Phys. D. – 2000. – V. 9. – P. 373.

References

1. Shchigolev V. K. *Commun. Theor. Phys*. 2011, vol. 56, pp. 389–396.
2. Shchigolev, V. K. Available at: http://arxiv.org;article-id: arXiv:[gr-qc] 1208.3454.
3. El-Nabulsi A. R. *Rom. Report in Phys*. 2007, vol. 59, pp. 763–771.
4. Uchaykin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p.
5. Calcagni G. *JHEP*. 2010, vol. 03, p. 120.
6. Calcagni G. *Phys. Rev. Lett*. 2010, vol. 104, p. 251301.
7. Debnath U., Jamil M., Chattopadhyay S. *Int. J. Theor. Phys*. 2010, vol. 51, pp. 812–837.
8. Jamil M., Rashid M. A., Momeni D., Razina O., Esmakhanova K. J. *Phys*.: Conf. Ser. 2012, vol. 354, p. 012008.
9. Sahni V., Saini T. D., Starobinsky A., Alam U. *JETP Lett*. 2003, vol. 77, p. 201.
10. Riess A. G., et al. *Astron. J*. 1998, vol. 116, p. 1009.
11. Perlmutte S. et al. *The Astrophysical Journal*. 1999, vol. 517, no. 2. стр?
12. Overduin J. M., Cooperstock F. I. *Phys. Rev. D*. 1998, vol. 58, p. 043506.
13. Sahni V., Starobinsky A. Int. J. Mod. Phys. D. 2000, vol. 9, p. 373.

Щиголев Виктор Константинович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42)

Shchigolev Viktor Konstantinovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of theoretical physics, Ulynovsk State University (Ulyanovsk, 42 L. Tolstogo str.)

E-mail: vkshch@yahoo.com

УДК 530.12:531.51; 524.834

Щиголев, В. К.

Космологические модели в теории дробного функционала действия / В. К. Щиголев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 133–146.